

Der Gaußsche Algorithmus - am Beispiel

$$\begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{II} & w + x - 4y - z = 6 \\ \text{III} & -w + 2x + y - 11z = 0 \\ \text{IV} & 2w - 3x + 5y + z = -7 \end{cases}$$

Grundidee: Zunächst 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten so kombinieren, daß ein Teilsystem aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten entsteht; dann eines aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten

Eliminiere w aus Gleichungen II-IV:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{II} - \text{I} =: \text{IIa} & 2x - 5y - 2z = 7 \\ \text{III} + \text{I} =: \text{IIIa} & x + 2y - 10z = -1 \\ \text{IV} - 2 \cdot \text{I} =: \text{IVa} & -x + 3y - z = -5 \end{cases} \quad \boxed{\text{NR}} \quad \begin{cases} \text{IV} & 2w - 3x + 5y + z = -7 \\ -2 \cdot \text{I} & -2w + 2x - 2y - 2z = 2 \\ \hline = \text{IVa} & -x + 3y - z = -5 \end{cases}$$

Eliminiere x aus Gleichungen IIIa und IVa:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5y - 2z = 7 \\ 2 \cdot \text{IIIa} - \text{IIa} =: \text{IIIb} & 9y - 18z = -9 \\ 2 \cdot \text{IVa} + \text{IIa} =: \text{IVb} & y - 4z = -3 \end{cases} \quad \boxed{\text{NR}} \quad \begin{cases} 2 \cdot \text{IIIa} & 2x + 4y - 20z = -2 \\ -\text{IIa} & -2x + 5y + 2z = -7 \\ \hline = \text{IIIb} & 9y - 18z = -9 \end{cases}$$

Eliminiere y aus Gleichung IVb:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5y - 2z = 7 \\ \text{IIIb} & 9y - 18z = -9 \\ \text{IVb} - \frac{1}{9} \cdot \text{IIIb} =: \text{IVc} & -2z = -2 \end{cases} \quad \boxed{\text{NR}} \quad \begin{cases} \text{IVb} & y - 4z = -3 \\ -\frac{1}{9} \cdot \text{IIIb} & -y + 2z = 1 \\ \hline = \text{IVc} & -2z = -2 \end{cases}$$

Gleichungen von unten nach oben auflösen: (Ausführlich aufgeschrieben)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5y - 2z = 7 \\ \text{IIIb} & 9y - 18z = -9 & : 9 \\ \text{IVc} & -2z = -2 & : (-2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + z = -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5y - 2z = 7 \\ \text{IIIb} & y - 2z = -1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases}$$

z aus IVc in I, IIa und IIIb einsetzen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y + 1 = -1 & -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5y - 2 = 7 & +2 \\ \text{IIIb} & y - 2 = -1 & +2 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + y = -2 \\ \text{IIa} & 2x - 5y = 9 \\ \text{IIIb} & y = 1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases}$$

y aus IIIb in I und IIa einsetzen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x + 1 = -2 & -1 \\ \text{IIa} & 2x - 5 = 9 & +5 \quad | : 2 \\ \text{IIIb} & y = 1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - x = -3 \\ \text{IIa} & x = 7 \\ \text{IIIb} & y = 1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases}$$

x aus IIa in I einsetzen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w - 7 = -3 & +7 \\ \text{IIa} & x = 7 \\ \text{IIIb} & y = 1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I} & w = 4 \\ \text{IIa} & x = 7 \\ \text{IIIb} & y = 1 \\ \text{IVc} & z = 1 \end{cases}$$

Lösungsmenge ablesen: $L = \{(4, 7, 1, 1)\}$