Polynomdivision

Beispiel: $\boxed{(x^3 + 2x^2 - 10x + 25) : [x+5]}$

in Worten: Dividiere das Polynom $(x^3 + 2x^2 - 10x + 25)$ (im Folgenden auch $p(x)$ genannt) durch das Polynom $[x+5]$ als Divisor $d(x)$. Das heißt: Suche als Quotient ein Polynom $q(x)$, das mit $[x+5]$ multipliziert $p(x)$ ergibt, das also $p(x) = [x+5] \cdot q(x)$ erfüllt.

$$(\qquad p(x) \qquad) : [x+5] \stackrel{!}{=} (\qquad q(x) \qquad)$$

$$\begin{array}{rrrrrll}
(x^3 & +2x^2 & -10x & +25) & : [x+5] & = (\; x^2 \;\; -3x \;\; +5 \;) & \\
-(x^3 & +5x^2 & &) & & \leftarrow & x^2 \cdot [x+5] = x^3 + 5x^2 \\
\hline
 & -3x^2 & -10x & +25 & & & \\
 -(& -3x^2 & -15x &) & & \leftarrow & -3x \cdot [x+5] = -3x^2 - 15x \\
\hline
 & & 5x & +25 & & & \\
 & -(& 5x & +25) & & \leftarrow & +5 \cdot [x+5] = 5x + 25 \\
\hline
 & & & 0 & =(\text{Rest}) & & \\
\end{array}$$

Probe

$$\begin{array}{rcr}
x^2 \cdot [x+5] & = & x^3 + 5x^2 \\
-3x \cdot [x+5] & = & -3x^2 - 15x \\
+5 \cdot [x+5] & = & 5x + 25 \\
\hline
 & & x^3 + 2x^2 - 10x + 25
\end{array}$$

Erklärung: Damit $q(x)$ mit $[x+5]$ ausmultipliziert $p(x)$'s höchste Potenz x^3 ergibt, muss $q(x)$ mit $x^3 : x$, also x^2 als höchstem Summanden beginnen. Dieses x^2 ergibt allerdings beim Ausmultiplizieren mit $[x+5]$ neben dem gewünschten x^3 auch $5x^2$, was gegenüber dem in $p(x)$ vorkommenden $2x^2$ um $3x^2$ zu groß ist. Die noch zu bestimmenden weiteren Summanden in $q(x)$ müssen also beim Ausmultiplizieren als höchsten Term $-3x^2$ und die noch ausstehenden Glieder $-10x + 25$ liefern.

Damit der nächste Summand von $q(x)$ mit $[x+5]$ ausmultipliziert den höchsten noch nicht abgedeckten Term $-3x^2$ liefert, muss er $-3x^2 : x = -3x$ lauten. Dieses $-3x$ ergibt allerdings neben $-3x^2$ auch noch $-15x$, also gegenüber p's Glied $-10x$ um $5x$ zu wenig. Die noch zu bestimmenden weiteren Summanden in $q(x)$ müssen also beim Ausmultiplizieren als höchsten Term $5x$ und das noch ausstehende Glied $+25$ liefern.

Damit der nächste Summand von $q(x)$ mit $[x+5]$ ausmultipliziert den höchsten noch nicht abgedeckten Term $5x$ liefert, muss er $5x : x = +5$ lauten. Dieses $+5$ ergibt neben $5x$ „zufällig“ auch noch die richtige $+25$.

Wenn eine Polynomdivision nicht aufgeht, bleibt anstelle der 0 ein Rest-Polynom $r(x)$, dessen Grad kleiner als der von $q(x)$ ist, und mit dem gilt: $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Dies ist analog zur Grundschulmäßigen Division „$17 : 5 = 3$ Rest 2“ mit $17 = 5 \cdot 3 + 2$.